



Lange Nacht der Mathematik



22. - 23. November 2024
(07)0809 – 1. Runde

Liebe Teilnehmer an der „**Langen Nacht der Mathematik**“, ihr freut euch darauf, in dieser Nacht an Aufgaben zu knobeln und zu versuchen, mit logischem Denken, mit geometrischem Vorstellungsvermögen, mit schnellem und richtigem Rechnen und Pffiffigkeit einigen Problemen zu Leibe zu rücken. Dazu sind Ausdauer und Hartnäckigkeit vonnöten. **Es ist Ehrensache, dass ihr die Aufgaben löst und nicht die älteren Schüler, Erwachsenen oder Lehrer.**

Mit einem Taschenrechner kann kein Beweis geführt werden. Auch ein Programm alleine kann kein Beweis sein und ist nicht gern gesehen.

Bei Verständnisproblemen in der Aufgabenstellung diskutiert ihr untereinander, fragt einen Lehrer oder schaut in unserem **Forum** vorbei. **Hier** werden auch alle Tipps und bei Fehlern Korrekturen veröffentlicht. Solltet ihr denken, dass es in einer Aufgabe einen Fehler gibt, können **eure Lehrer** unsere **Hotline** anrufen.

Um in die nächste Runde zu kommen, müssen alle Aufgaben richtig gelöst und auf unserer Internetseite eingegeben werden. Alle Antworten sind, sofern es nicht explizit im Aufgabentext steht, **ohne LEERZEICHEN** einzugeben!

In den ersten beiden Runden gibt es zu jeder Aufgabe einen Antworttyp, der das Format der Lösung angibt. Alle Antworttypen setzen sich aus verschiedenen Basis-Antworttypen zusammen.

(Viele Beispiele gibt es **hier**.) Als Basis-Antworttypen gibt es:

\mathbb{N}	natürliche Zahlen (einschließlich der Null),
\mathbb{Z}	ganze Zahlen,
\mathbb{Q}	gekürzte Brüche, z.B. $3/7$, $13/1$ oder $25/4$,
\mathbb{R}	in Kombination mit π ; e ; \dots , z.B. $2w(3;5)$ für 2 mal 3. Wurzel aus 5 oder 25 oder $4\pi + 3$ oder $2\pi + w(2;2)$ etc. Häufig akzeptieren wir hier mehrere Schreibweisen.
$\mathbb{R}(n)$	Dezimalbruch gerundet auf n Stellen (mathematisches Runden), z.B. 1,750,
$\{G\}$	Teilmenge von G . Ist $G = \mathbb{N}$ sind $\{3; 7; 8\}$ oder $\{\}$ oder „ \mathbb{N} “ Beispiele. Ist $G = \mathbb{R}$ und die gesuchte Menge nicht endlich, so suchen wir eine Liste von Intervallen (mit $\pm\text{inf}$) als „unendlich“; z.B.: $(-\text{inf}; -5]$; $[3; 4)$; $(7; 55]$; $[42; \text{inf})$.
$\{G \times H \times \dots\}$	Teilmenge von $G \times H \times \dots$. Bei $\{\mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ z.B. $\{(1; 4); (2; 9)\}$ oder $\{\}$ oder „ $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ “.
Wort(n)	Zeichenfolge mit n Zeichen. Ist n nicht angegeben, so ist die Länge nicht bekannt,
Zeitangaben	sind im Format dd:hh:mm:ss je nach Genauigkeit gefordert,
Datumsangaben	sind im Format tt.mm.jjjj je nach Genauigkeit anzugeben.

Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg!

Das Mathenacht-Team

Die Aufgaben der Mathenacht stehen unter Urheberschutz und dürfen außerhalb der Mathenacht nur auf Nachfrage verwendet werden!

Aufgabe 1.1: Querprodukt

1. Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die ein Querprodukt von 56 aufweisen?
2. Wie viele vierstellige natürlichen Zahlen gibt es, die ein Querprodukt von 72 aufweisen?

Einzugeben ist die Summe beider Antworten.

Lösungstyp: \mathbb{N}

Aufgabe 1.2: Achtstellige Zahlen

Wie viele achtstellige natürliche Zahlen kann man erzeugen, die die folgenden Bedingungen erfüllen

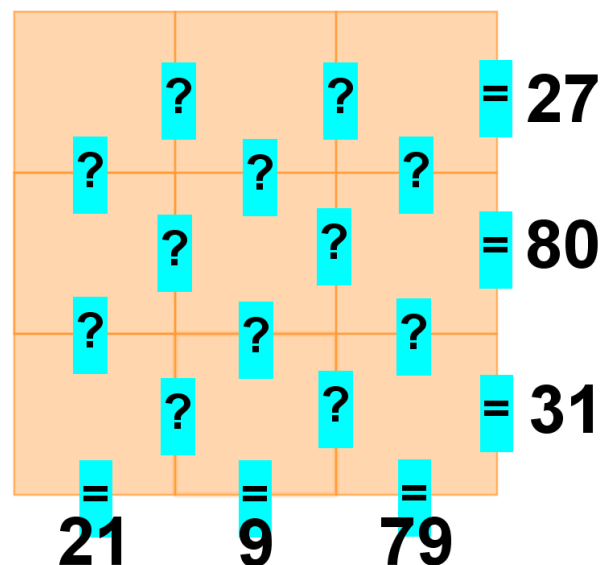
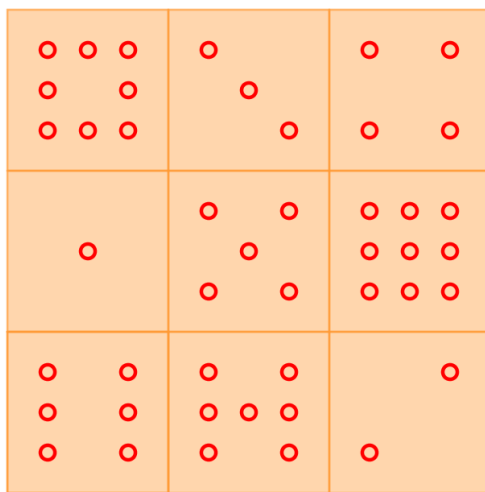
1. die Zahl besteht nur aus den Ziffern 2, 3, 4,
2. die positive Differenz zweier benachbarter Ziffern ist stets 1.

Lösungstyp: \mathbb{N}

Wir suchen Helfer (Studenten; Lehrer; Oberstufenschüler) die uns beim Korrekturlesen der Aufgaben oder bei der Korrektur der Einsendungen helfen wollen!

Der zeitliche Aufwand ist überschaubar! Wenn aus jeder Schule pro ca. 30 Gruppen ein Helfer gestellt würde, wären alle unsere Probleme gelöst. In [diesem Forumspost](#) findet ihr mehr Informationen.

Aufgabe 1.3: Neun Quadrate



Alice verschwand wieder einmal in das Land hinter den Spiegeln und entdeckte auf einem Tisch neun Quadrate, auf denen wie beim Dominospiel die Zahlen von 1 bis 9 dargestellt waren.

Plötzlich standen zwei Männlein vor ihr: „Wir sind Tweedledee und Tweedledum“ sagte das eine Männlein. „Sondern umgekehrt.“, widersprach das andere Männlein, „Wir sind Tweedledum und Tweedledee. Was du siehst sind neun Zahlen ins Quadrat gelegt; wir haben nur die Rechenzeichen und Gleichheitszeichen zwischen und neben und unter den Quadraten entfernt.“ sagte Tweedledee „Sondern umgekehrt.“ widersprach Tweedledum.

„Oder umgekehrt?“ dachte Alice, die immer noch nicht wusste wer wer ist.

„Damit wir deine Neugier stillen, haben wir zeilenweise und spaltenweise die Ergebnisse mit den Gleichheitszeichen angegeben.“ meinte Tweedledum. „Oder umgekehrt,“ sagte Tweedledee, „und die Rechenzeichen kannst du dir sicher selber denken.“ „Oder umgekehrt.“ lächelte Tweedledum.

Verteile die Quadrate so auf das Feld, sodass in jeder Spalte als auch in jeder Zeile die Rechnung mit den unsichtbaren Rechenzeichen stimmt. Die Ziffern zeilenweise von oben links nach unten rechts ergeben eine neunstellige Zahl. Diese Zahl ist anzugeben.

Lösungstyp: \mathbb{N}

Aufgabe 1.4: Kaufleute

Im Mai des Jahres 1643 haben A, B und C Roggen frei auf den Boden zu liefern gekauft, und zwar

Person	Menge	Preis/Scheffel	Herkunft
A	99 Last 3 Drömt 9 Scheffel	21 fl minus 2 d	stichtisch
B	89 Last 7 Drömt 7 Scheffel	21 fl 8 d	öselschen
C	96 Last 6 $\frac{1}{2}$ Drömt	22 fl minus 4 d	revalsche

(stichtisch: von den Stiftsgütern oder livländisch)



Der stichtische ist von Mai bis Oktober für 23 fl 4 d je Scheffel verkauft worden, der öselsche im November und Dezember 1643 für 28 fl 2 d je Scheffel (als lange Westwind herrschte und Soldaten ganz unvermutet und rasch in Holstein quartiert und hausiert hatten), und der revalsche erst im Januar 1644 (da mit Nordost-Wind wieder mehr Roggen in die Stadt kam) für 26 fl je Scheffel.

An Unkosten traten zusätzlich auf:

A	B	C
19 $m.l.$ 8 $\frac{1}{2}$ fl	24 $m.l.$ 6 fl	28 $m.l.$ 7 fl

Dagegen fanden sich bei A 15, B 18 und bei C 21 Scheffel (an) Übermaß.

Wie viel ein jeder insgesamt und prozentual verdient hat.

(Bildnachweis Bibliothek der Stadt Hansestadt Lübeck)

Der Originaltext ist nicht nur in heutige Sprache „übersetzt“, sondern mit den Tabellen auch übersichtlicher gestaltet.

Anzugeben sind für jeden der drei Kaufleute der Nettogewinn in Prozenten.

Hilfe:

1 Last = 8 Drömt; 1 Drömt = 12 Scheffel

1 $m.l.$ $\hat{=}$ 1 Mark Lübisches = 16 fl (Schilling); 1 fl = 12 d (Pfennig)

Wenn ein Kaufmann „Übermaß“ festgestellt hat, dann hat er beim Einkauf mehr bekommen, als er wollte und machte also zusätzlichen Gewinn.

Lösungstyp: N;N;N

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.

Da wir den Wettbewerb privat betreiben und als Gast in einer Schule für die Nacht aufgenommen werden, müssen wir auch alle benötigten Materialien/Geräte mitbringen. Kosten entstehen für Drucker & Papier, Hotline-Geräte, Fahrtkosten etc.

Stichwort *Mathenacht*

Kontoinhaber: MaWeSH e.V.

Kreditinstitut: Sparkasse Lübeck

IBAN: DE 18 2305 0101 0160 0413 56

Aufgabe 1.5: 7er-Zahlenfolge

Vierzig aufeinanderfolgende Vielfache von 7 besitzen das arithmetische Mittel 192,5.

Gesucht ist das Produkt der kleinsten und der größten dieser vierzig Zahlen.

Lösungstyp: N

Aufgabe 1.6: Four Miles & 2024

1. Elijah went on a four-mile journey. He walked the first mile at 3 miles per hour and the second mile at 4 miles per hour. Then he ran the third mile at 5 miles per hour and the fourth mile at 6 miles per hour. Elijah's average speed for this journey in miles per hour was $\frac{m}{n}$, where m and n are relatively prime positive integers. Find $m + n$.
2. Positive integers m and n satisfy

$$(m + n)(16mn + 13) = 2024.$$

Find $m + n + 12mn$.

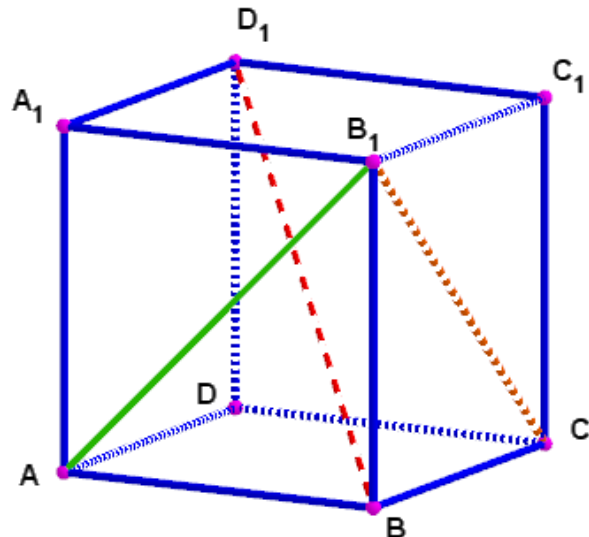
Lösungstyp: $\mathbb{N}; \mathbb{N}$

Aufgabe 1.7: Ukraine - eine Übungsaufgabe

ГЕОМЕТРИЯ (Є. П. Нелін)

Bestimme im Würfel (Hexaeder) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ die Winkel zwischen der jeweils gegebenen Strecke und der Ebene:

- (a) AB_1 und der Ebene $ABCD$;
- (b) AB_1 und der Ebene $A_1 B_1 C_1 D_1$;
- (c) AB_1 und die Ebene $AA_1 D_1 D$;
- (d) AB_1 und das Quadrat $BB_1 C_1 C$;
- (e) BD_1 und das Quadrat $ABCD$;
- (f) BD_1 und die Ebene $BB_1 C_1 C$;
- (g) $B_1 C$ und das Quadrat $ABCD$;
- (h) $B_1 C$ und die Ebene $CDD_1 C_1$.



Gesucht ist die Summe aller acht Winkel.

Lösungstyp: $\mathbb{R}(2)$

Aufgabe 1.8: Viele Bälle

In der Sporthalle steht ein großer Ballkorb und davor in einer Reihe n Kinder.

Nacheinander nehmen die Kinder Bälle aus dem Korb:

Das erste Kind nimmt einen Ball und ein Zehntel der übrigen Bälle.

Das zweite Kind nimmt zwei Bälle und dann ein Zehntel der übrigen Bälle.

Das dritte Kind nimmt drei Bälle und dann ein Zehntel der übrigen Bälle.

...

Die folgenden Kinder nehmen nach demselben Muster Bälle aus dem Ballkorb. Wenn das letzte Kind alle seine Bälle entnommen hat, ist der Ballkorb leer und alle Kinder haben die gleiche Anzahl an Bällen.

Gesucht ist n .

Lösungstyp: \mathbb{N}

Aufgabe 1.9: Teilbarkeit und Reste

- Adding n to 2024 produces a positive integer that is divisible by every integer from 1 to 10. What is the smallest possible value of n ?
- Charly erzählt ihrem Vater, dass die Pfefferkörner gestern ihr Passwort für das Türschloss geändert haben. Deswegen kann sie ja verraten, wie ihr vorheriges Passwort entstanden ist: die einzugebende Zahl hinterlässt bei Division durch
 - 1 den Rest 0;
 - 2 den Rest 1;
 - 3 den Rest 2;
 - 4 den Rest 3;
 - 5 den Rest 4;
 - 6 den Rest 5;
 - 7 den Rest 6;
 - 8 den Rest 7;
 - 9 den Rest 8;
 - 10 den Rest 9;
 - 11 den Rest 10.

Charly hat schnell herausbekommen, dass es davon viele gibt, aber nur endlich viele fünfstellige und diese interessieren sie, weil das Türschloss mit einer fünfstelligen Zahl zu öffnen ist. Wie lautet die größte von diesen fünfstelligen Zahlen, die obige Bedingungen erfüllt?

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{N}$

Aufgabe 1.10: Str8ts (3)

Das Str8ts-Spielfeld besteht aus $n \times n$ Feldern. Die Felder sind zunächst nur teilweise mit Zahlen von 1 bis n belegt. Zusätzlich sind einige Felder dunkel gefärbt und teilweise ebenfalls mit Zahlen von 1 bis n belegt.

Dunkle Felder sind Trennfelder und unterteilen die Zeilen und Spalten des Spielfeldes in Bereiche von senkrecht oder waagrecht zusammenhängenden weißen Feldern. Bereiche werden vom Spielfeldrand oder von dunklen Feldern begrenzt. Sie können verschieden groß sein: Von einem weißen Feld bis hin zu einer kompletten Zeile oder Spalte mit n weißen Feldern.

Die noch freien weißen Felder müssen mit Zahlen von 1 bis n gefüllt werden. Zu beachten ist:

- Wie bei Sudoku darf in jeder Zeile und Spalte jede Zahl höchstens einmal vorkommen, egal ob die Zahl in einem weißen Feld oder als weiße Zahl in einem dunklen Feld steht.
- Alle Zahlen, die einem Bereich, also einer zusammenhängenden Folge von weißen Feldern angehören, müssen eine Straße bilden. Eine Straße ist bei Str8ts eine lückenlose Menge aufeinander folgender Zahlen, die jedoch in beliebiger Reihenfolge in der Abteilung auftreten können.
- Dunkle Felder – ob mit oder ohne Zahl – dienen immer als Trennfelder. Wenn ein dunkles Trennfeld eine Zahl enthält, dann darf diese Zahl in der Zeile und Spalte, die dieses Feld enthält, nicht mehr verwendet werden.
- Dunkle Felder mit Zahlen sind selber nie Teil einer Straße und stehen deshalb in keinem direkten Zusammenhang mit den Straßen in benachbarten weißen Bereichen.
- Manche weiße Felder sind bereits mit Zahlen belegt. Diese Zahlen sind Teil der Straße in dem entsprechenden Bereich.

- Einige dunkle Felder sind leer, sie enthalten keine Zahl, **ihnen wird auch keine Zahl zugeordnet**. Das bedeutet, dass in Zeilen oder Spalten mit leeren schwarzen Feldern deshalb nicht alle Zahlen von 1 bis n vorkommen.
- Es kann auch vorkommen, dass statt der Zahlen in einer Aufgabe nur Buchstaben benutzt werden.

In den 4 Aufgaben gibt es dunkle Felder ohne Zahlen. Jetzt sollen nur (senkrechte) Spalten betrachtet werden. Dann fehlen in den betreffenden dunklen Feldern der Spalten Zahlen aus der Menge 1 bis 9. Gesucht ist die Summe dieser Zahlen.

							9	6
		7				4		
					4		2	
			6		1			4
8								

5								2
				5		8		
3		4						9
	9							
		7						2
			9	8	1			
6								
							3	6

	4		3		7			
	2						6	
						5		8
	1				4			
				4				
	8			9			2	1
		9		8		1		
				3				
								6

				7				
2			4		6	9		
	1							
								5
8		7				3	1	
					9	7	4	3
						6		
		1	9			5		